

## Proba teoretică – seniori

**I.A. (7 puncte)** Ce durează mai mult: cea mai lungă zi sau perioada dintre răsăritul și apusul Lunii?

**Rezolvare:** Intervalul de timp dintre răsăritul și apusul Lunii. Aceasta se explică atât prin faptul că Luna se mișcă pe orbită în sens invers mișcării diurne, cât și prin faptul că Luna, de regulă, are declinație mai mare decât Soarele, întrucât orbita sa este înclinată față de ecliptică.

### Barem de corectare:

oficiu ..... 1 punct  
stabilirea diferențelor dintre mișcarea Lunii și Soarelui .....2x3 puncte

**B. (8 puncte)** La 16 iulie 2000 s-a produs o eclipsă totală de Lună, în care Luna, aflată aproape de apogeul orbitei sale, a trecut, practic, prin centrul orbitei terestre. Va fi aproape de maximum teoretic valoarea fazei maxime a eclipsei? Dar valoarea duratei fazei de totalitate?

**Rezolvare:** Pe măsura îndepărtării de Pământ, diametrul umbrei planetei noastre scade și, în mod corespunzător, scade și raportul dintre acest diametru și diametrul Lunii. De aceea, cea mai mare fază va corespunde acelor eclipse centrale pentru care satelitul nostru este mai aproape de perigeul său, și nu de apogeul orbitei, ceea ce înseamnă că faza eclipsei din 16 iulie 2000 a fost mai mică decât cea maximală. Durata fazei maxime (1h 47 min), în schimb, se atinge atunci când Luna se apropie de apogeu, pentru că la apogeu viteza de mișcare a Lunii este cu aproape 15% mai mică decât la perigee, iar dimensiunea spațială a umbrei – cu 5% mai mică.

### Barem de corectare:

oficiu ..... 1 punct  
la apogeu este punctul de pe orbita Lunii în care aceasta este la distanță maximă de Pământ ..... 2 puncte  
lungimea traiectoriei Lunii prin umbra Pământului este mai minimă..... 2 puncte  
durata fazei maxime nu este maximă ..... 1 puncte  
durata totalității este maximă, Luna fiind la apogeu se mișcă încet la apogeu ..... 2 puncte

**C. (10 puncte)** În anul 2088 vor fi cinci duminici în luna februarie. În ce an se va întâmpla pentru prima dată după 2088 să fie cinci duminici în februarie? În ce an s-a întâmplat ultima dată înainte de 2088 să fie cinci duminici în februarie?

**Rezolvare:** Anul 2088 este un an bisect, deci luna februarie are 29 de zile. Dacă au fost cinci duminici înseamnă că 1 februarie a fost într-o zi de duminică. Un an bisect are 366 de zile, adică 52 de săptămâni și două zile. Asta înseamnă că dacă în 2088, 1 februarie va fi într-o duminică, în 2089, 1 februarie va fi într-o zi de marți. În 2090, după un an obișnuit, adică 365 zile, 52 de săptămâni și o zi, 1 februarie va fi într-o zi de miercuri.

Folosind acest raționament și ținând seama că 2100 nu este an bisect (ani de la sfârșitul unui secol sunt biseți doar dacă se divid cu 400) ajungem la concluzia că primul an bisect în care luna februarie începe într-o duminică este 2128.

Pentru a afla când s-a întâmplat pentru ultima dată acest lucru folosim un raționament similar cu cel de mai sus, atâta doar că atunci când se mergem în trecut între 1 februarie dintr-un an bisect și anul dinaintea lui trec 365 de zile, deci 1 februarie 2087 a fost într-o sâmbătă, dar între 1 februarie dintr-un an dinaintea unuia bisect și un an bisect trec 366 zile. Astfel între 1 februarie 2085 și 1 februarie 2084 trec 366 de zile. Anul căutat este 2060.

**Barem de corectare:**

oficiu .....	1 punct
2088 an bisect, februarie are 29 de zile .....	2 puncte
5 duminici înseamnă 1.02 și 29.02 sunt duminica .....	1 punct
un an normal de 365 zile are 52 săptămâni și o zi, un an bisect are 52 de săptămâni și 2 zile .....	1 punct
calculul corect al anului următor în care are loc situația din problemă 2128 (se are în vedere că 2100 nu este bisect) .....	3 puncte
calculul corect pentru situația similară din trecut (2060) .....	3 puncte

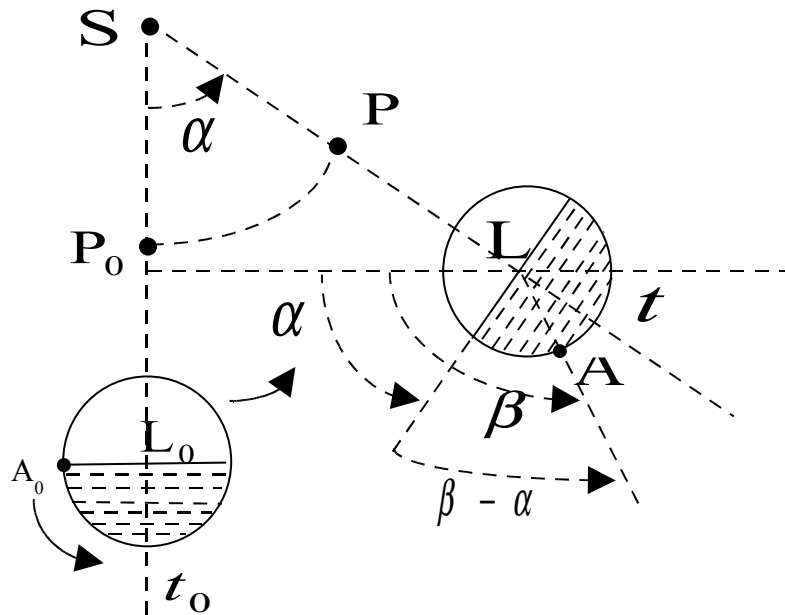
**II.A. (13 puncte)** Pentru un observator de pe suprafața Lunii, atât Pământul, cât și Soarele se pot considera puncte materiale, permanent colineare cu centrul Lunii. Datorită rotației proprii a Lunii, pe suprafața acesteia există alternanța zi – noapte. *Să se determine*, pentru observatorul de pe suprafața Lunii, durata nopții lunare, cunoscând perioada rotației proprii a Lunii,  $T_L = 27,25$  zile terestre și perioada rotației Pământului în jurul Soarelui,  $T_{PS} = 365$  zile terestre.

**Rezolvare**

Datorită rotației proprii, Luna își expune treptat spre Soare întreaga suprafață, astfel încât pentru un observator de pe suprafața Lunii există alternanța zi – noapte, cu o durată diferită de aceea a alternanței zi – noapte de pe Pământ.

În figura alăturată este reprezentat sistemul Soare – Pământ – Lună, la momentele  $t_0$  și respectiv  $t$ , atunci când, pentru observatorul aflat în repaus pe suprafața Lunii, începe noaptea lunară (poziția  $A_0$ ) și la un moment oarecare din noapte (poziția  $A$ ). Sunt evidențiate pozițiile Lunii în raport cu Soarele la cele două momente considerate.

În intervalul de timp  $\Delta t = t - t_0$  direcția Soare – Pământ – Lună s-a rotit cu unghiul  $\alpha = \omega_{PS} \Delta t$ , unde  $\omega_{PS}$  este viteza unghiulară a Pământului în mișcarea sa circulară efectuată în jurul Soarelui, iar raza vectoare a observatorului, în raport cu centrul Lunii, s-a rotit cu unghiul  $\beta = \omega_L \Delta t$ , unde  $\omega_L$  este viteza unghiulară a rotației proprii a Lunii. Evident și unghiul cu care s-a rotit linia de separare dintre cele două zone (luminată și respectiv întunecată) de pe suprafața Lunii, în același interval de timp,  $\Delta t$ , este  $\alpha$ .



Observatorul va ieși din noaptea lunară, atunci când  $\beta - \alpha = \pi$ . În aceste condiții, rezultă:

$$\omega_L \Delta t_{nL} - \omega_{PS} \Delta t_{nL} = \pi ;$$

$$\Delta t_{nL} = \frac{\pi}{\omega_L - \omega_{PS}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_L} - \frac{2\pi}{T_{PS}}} = \frac{T_L T_{PS}}{2(T_{PS} - T_L)} = 14,72 \text{ zile terestre.}$$

### Barem de notare

- desenul explicativ .....4  
**puncte**
- ecuatia unghiului la centru cu care s-a rotit raza vectoare a centrului Lunii in raport cu centrul Soarelui .....1,5  
**puncte**
- ecuatia unghiului la centru cu care s-a rotit raza vectoare a observatorului in raport cu centrul Lunii.....1,5  
**puncte**
- relatia dintre cele doua unghiuri corespunzatoare duratei noptii Lunare ....  
.....2  
**puncte**
- expresia analitica a duratei noptii Lunare.....2  
**puncte**
- valoarea numerica duratei noptii Lunare.....1  
**punct**

- din oficiu .....	1
<b>punct</b>	
<b>TOTAL .....</b>	<b>13</b>
<b>puncte</b>	

**B. (12 puncte)** Pilotul unei nave cosmice (considerată punct material), observă un asteroid sferic cu raza  $R$ , atunci când, în zbor cu viteza  $v_0$  pe direcția centrului asteroidului, distanța dintre navă și suprafața asteroidului este  $L$ . Imediat cosmonautul acționează, pentru un timp extrem de scurt (neglijabil), unul din motoarele cu reacție, existent pe una din părțile laterale ale navei, care realizează o variație  $\Delta v$  a vitezei navei, al cărei modul,  $\Delta v$ , este limitat de puterea motorului. Să se stabilească orientarea optimă ce trebuie să i se asigure vectorului  $\Delta v$  și să se determine  $\Delta v$  astfel încât, realizându-se această orientare optimă, să poată fi evitată coliziunea navei cu asteroidul. Viteza asteroidului este neglijabilă față de viteza navei.

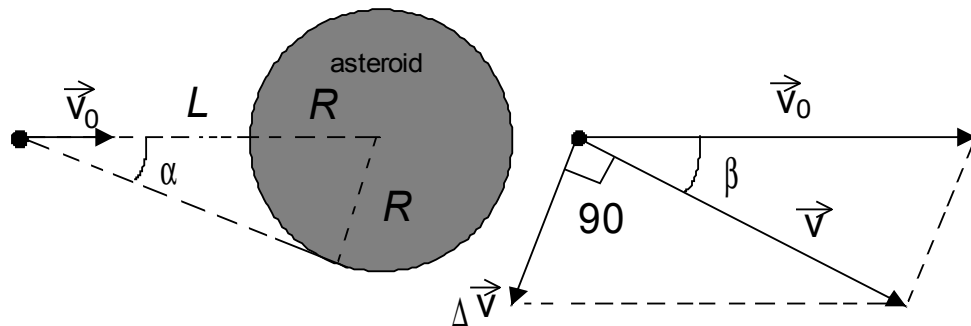
### Rezolvare

Pentru evitarea coliziunii trebuie ca orientarea vectorului viteză al navei să fie schimbată, astfel încât unghiul dintre noua sa direcție și direcția sa inițială să fie superior unghiului  $\alpha$  notat în figura alăturată, pentru care avem:

$$\sin \alpha = \frac{R}{L + R}.$$

Orientarea optimă a corecției  $\Delta v$ , la o valoare dată a lui  $\Delta v$ , este aceea care face ca direcția vectorului viteză finală,  $v$ , să fie maxim deviată față de direcția vectorului viteză inițială,  $v_0$ . Aceasta se întâmplă atunci când direcția corecției  $\Delta v$  este perpendiculară pe direcția vitezei finale,  $v$ , așa cum indică figura alăturată, din care rezultă:

$$\sin \beta = \frac{\Delta v}{v_0}.$$



Pentru evitarea coliziunii este necesar să avem:

$$\sin \beta > \sin \alpha ; \frac{\Delta v}{v_0} > \frac{R}{R+L};$$

$$\Delta v > \frac{Rv_0}{R+L}.$$

**Barem de notare**

- desenul explicativ.....	<b>4</b>
<b>puncte</b>	
- precizarea si expresia unghiului de coliziune.....	..... <b>1</b>
<b>punct.</b>	
- conditia pentru evitarea coliziunii.....	..... <b>2</b>
<b>puncte</b>	
- precizarea si expresia unghiului de evitare a coliziunii.....	<b>1</b>
<b>punct</b>	
- precizarea conditiei de evitare a coliziunii.....	<b>1</b>
<b>punct</b>	
- modulul corectiei vitezei .....	<b>2</b>
<b>puncte</b>	
- din oficiu .....	<b>1</b>
<b>punct</b>	
<b>TOTAL .....</b>	<b>12</b>
<b>puncte</b>	

**III A. (8 puncte)** Pentru două stele A și B maximul de intensitate a radiației lor s-a găsit la lungimile de undă de 6500 Angströmi, respectiv 4000 Angströmi. Știind că raza stelei A este de două ori raza stelei B găsiți diferența dintre magnitudinile lor absolute.

**Rezolvare:** Pentru a afla diferența dintre magnitudinile absolute ale stelelor folosim relația lui Pogson  $M_A - M_B = -2,5 \cdot \lg(L_A/L_B)$ . Raportul luminozității stelelor se găsește din relația dintre luminozitatea, raza și temperatura lor:  $L = 4 \pi R^2 \cdot \sigma T^4$ , unde  $\sigma$  este constanta lui Stefan. Temperatura efectivă a stelelor se află din legea lui Wien (produsul dintre lungimea de undă la care se atinge maximul de radiație al stelei și temperatură efectivă a ei este constant), adică raportul temperaturilor stelelor este inversul lungimilor de undă ale stelelor. Știind că raza stelei A este de două ori raza stelei B, raportul luminozității stelelor devine  $L_A/L_B = 2^2 \cdot (8/13)^4$ . Înlocuind obținem diferența magnitudinilor  $0,6^m$ .

**Barem de corectare:**

oficiu .....	1 punct
utilizarea corectă a legii lui Wien pentru aflarea temperaturilor .....	2 puncte
scrierea corectă a diferenței magnitudinilor absolute,	
deduse din legea lui Pogson .....	2 puncte
scrierea corectă a raportului luminozităților .....	2 puncte

obținerea rezultatului corect ..... 1 punct

**B. (10 puncte)** Distanța dintre Jupiter și Soare este de 5,2 u.a. și magnitudinea sa aparentă la opoziție este de  $-2,3^m$ . Calculați care este magnitudinea aparentă a lui Jupiter atunci când acesta se află la separare maximă de Soare pentru un observator aflat pe steaua  $\alpha$  Centauri, care are paralaxa egală cu  $0.758''$ .

**Rezolvare:** Pentru a afla magnitudinea aparentă a lui Jupiter privit de un observator aflat pe steaua  $\alpha$  Centauri folosim formula lui Pogson  $m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \lg(s_1/s_2)$ , unde  $m_1$  este magnitudinea căutată, iar  $m_2$  este magnitudinea dată. Strălucirea  $s_2$  se află împărțind luminozitatea lui Jupiter la  $4\pi d^2$ , unde  $d$  este distanța dintre Pământ-Jupiter, când Jupiter este la opoziție, adică 4.2 unități astronomice. Aceeași formulă se folosește și pentru  $s_1$ . Distanța la care se află observatorul de pe  $\alpha$  Centauri se află folosind paralaxa stelei:  $\sin P = 1 \text{ u.a.}/d$ , unde  $P$  este paralaxa stelei, iar  $d$  este distanța Pământ-Stea. Pentru unghiuri mici, sinusul unghiului se aproximează cu unghiul exprimat în radiani ( $P'' = P(\text{radiani})/206265$ ). Astfel, raportul strălucirilor lui Jupiter devine egal cu pătratul inversului raportului distanțelor. Înlocuind în formula lui Pogson găsim  $m_1 = +21,757^m$ .

**Barem de corectare:**

oficiu ..... 1 punct  
scrierea corectă a legii lui Pogson pentru cazul din problemă ..... 2 puncte  
stabilirea corectă a distanțelor corespunzătoare.....2x2 puncte  
obținerea rezultatului corect ..... 1 punct

**C. (7 puncte)** Galaxia noastră are o rază de 30 kpc și o grosime de 600 pc. Dacă în galaxia noastră se produc cinci explozii de supernovă la fiecare 100 de ani, cât de des ne putem aștepta să se producă o explozie într-o vecinătate de o rază 100 de parseci a Soarelui? Se consideră că stelele sunt uniform distribuite în galaxie.

**Rezolvare:** Remarcăm, mai întâi, că, întrucât Soarele se află aproape de planul galactic, o sferă cu raza de 100 de parseci, cu centrul în Soare, se află în întregime inclusă în galaxie. Conform datelor problemei, rata exploziilor de supernovă în galaxia noastră este de 0.05 explozii/an. Pentru a determina rata exploziilor de supernovă într-o sferă cu raza de 100 de parseci, cu centrul în Soare, înmulțim această cantitate cu raportul dintre volumul acestei sfere (adică  $4\pi r^3/3$ ) cu volumul galaxiei (adică  $\pi R^2 d$ ) și obținem că rata exploziilor de supernovă în această sferă este de  $1,27/10^7$ , adică avem, cu aproximație, o explozie de supernovă la fiecare 8,1 milioane de ani.

**Barem de corectare:**

oficiu ..... 1 punct  
calculul raportului dintre volumul galaxiei și a vecinătății Soarelui..... 4 puncte  
rezultatul corect .....2 puncte

